ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 36.1 (2018): 45-60
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2240
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

El discurso matemático del profesor: ¿Cómo se produce en clase y cómo se puede investigar?

The teacher's mathematical discourse: How is it produced in the classroom and how can it be researched?

Núria Planas
Universitat Autònoma de Barcelona, Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals
Nuria.Planas@uab.cat

Alberto Arnal-Bailera
Universidad de Zaragoza, Departamento de Matemáticas
albarnal@unizar.es

Itziar García-Honrado
Universidad de Oviedo, Departamento de Estadística e Investigación Operativa y Didáctica de la Matemática
garciaitziar@uniovi.es

RESUMEN •¿Cómo podemos evaluar si un discurso del profesor en clase de matemáticas es efectivo de acuerdo con los objetivos de comunicar una cultura de la matemática escolar y producir oportunidades para que los alumnos aprendan contenidos de esa cultura? En este artículo presentamos la construcción de una noción de coherencia local aplicable al discurso matemático hablado en clase. Creamos indicadores de coherencia y los relacionamos con la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. Ilustramos esto con datos de dos profesores y la caracterización del discurso –su coherencia– en su enseñanza con ejemplos. La discusión de grados de coherencia y de oportunidades de aprendizaje sugiere diferencias entre el discurso de ambos profesores. Evaluamos la noción desarrollada a partir de este resultado.

PALABRAS CLAVE: discurso matemático del profesor; enseñanza con ejemplos; coherencia local del discurso; oportunidades de aprendizaje matemático.

ABSTRACT • How can we examine if a teacher's discourse in the mathematics classroom is effective according to the goals of communicating a culture of school mathematics and producing opportunities for students to learn contents of this culture? In this paper, we present the construction of a notion of local coherence applied to the oral mathematical discourse in the classroom. We create indicators of coherence and relate them to the generation of mathematics learning opportunities. We illustrate the process with data from two teachers and the characterization of their discourse –its coherence– when teaching with examples. The discussion of grades of coherence and learning opportunities serves to distinguish the teachers' discourses. Drawing on this finding, we evaluate the notion of local coherence.

KEYWORDS: teacher's mathematical discourse; teaching with examples; local coherence of discourse; mathematics learning opportunities.

Recepción: mayo 2017 • Aceptación: agosto 2017 • Publicación: marzo 2018

Planas, N., García-Honrado, I., & Arnal-Bailera, A. (2018). El discurso matemático del profesor: ¿Cómo se produce en clase y cómo se puede investigar?. *Enseñanza de las ciencias, 36*(1), 45-60.

INTRODUCCIÓN

¿Cómo podemos evaluar si un discurso del profesor en clase de matemáticas es efectivo de acuerdo con los objetivos de comunicar una cierta cultura de la matemática escolar y de producir oportunidades para que los alumnos aprendan contenidos esenciales de esa cultura? En la actualidad disponemos de un amplio cuerpo de trabajos en educación matemática donde las perspectivas sociales se utilizan en la aproximación a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas a través del acceso a discursos específicos (Planas y Valero, 2016). No obstante, mientras que estas perspectivas se hallan en un punto álgido de reconocimiento, las concreciones analíticas sobre cómo se produce y desarrolla el discurso del profesor siguen siendo escasas. En este artículo, presentamos la construcción de una noción de coherencia local aplicable al estudio del discurso hablado del profesor en clase. Con base empírica en momentos de enseñanza con ejemplos, creamos indicadores de coherencia y los relacionamos con la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. Ilustramos el proceso con datos de dos profesores en dos lecciones introductorias a la probabilidad. La asignación de grados de coherencia y la discusión de oportunidades de aprendizaje sirven para observar diferencias entre el discurso de ambos profesores a nivel local. A partir de este resultado, evaluamos la noción propuesta y anticipamos adecuaciones en el análisis de momentos de enseñanza más generales.

Junto al propósito último de aportar novedades al estudio del discurso matemático del profesor, nos mueve el propósito de contribuir a la comprensión de las complejas relaciones entre enseñanza y aprendizaje (e.g. Callejo, Valls y Llinares, 2007; García, Sánchez, Escudero y Llinares, 2006; Sherin, 2002). Si bien algunas pruebas internacionales se utilizan en varios países como una medida del impacto *medio* de la enseñanza de las matemáticas en el rendimiento matemático *medio* de grupos de alumnos, estas métricas no explican ni la complejidad de las relaciones, ni su especificidad, ni las posibles complementariedades existentes. Comprender las relaciones entre enseñanza y aprendizaje requiere indicadores cualitativos más sofisticados. Al respecto, nuestra investigación pretende vincular una cierta manifestación discursiva de la enseñanza con beneficios en el aprendizaje de los alumnos, en el sentido de poner a su disposición, en el discurso de clase, oportunidades de aprendizaje matemático (e.g. Chico, 2014; Ferrer, Fortuny, Morera y Planas, 2014).

DISCURSO MATEMÁTICO DEL PROFESOR

La idea general de discurso alude a los múltiples procesos mediante los cuales las personas se comunican entre ellas para comunicar; esto es, el discurso es a la vez medio y objetivo (Gee, 1996). Así, un *medio* habitual del discurso del profesor en clase es el del habla en torno a la resolución de tareas. Por otra parte, un *objetivo* habitual es el de la enseñanza de unos objetos de aprendizaje. Si el profesor es de matemáticas, las tareas y objetos de aprendizaje son principalmente de naturaleza matemática, aunque no solo, ya que se les da significado en los contextos institucional, pedagógico y social de la escuela y del aula, entre otros. El discurso matemático del profesor de matemáticas en clase comunica contenidos que dependen de artefactos, rutinas y metarreglas que históricamente se han utilizado para comunicar la matemática escolar como género afín a la matemática orientado a la instrucción (Roth y Radford, 2011; Steinbring, 2005). Así, el profesor habla para comunicar mediante tareas unos objetos de aprendizaje, sobre los que los alumnos deben aprender a hablar en situaciones de interacción explícita o implícita (Chico, 2014).

El marco del *Mathematical Discourse in Instruction* desarrollado por Adler y colaboradores (e.g. Adler y Ronda, 2015; Adler y Venkat, 2014; Venkat y Adler, 2012) surge precisamente de la consideración del profesor de matemáticas como agente con tareas escolares que debe realizar para comunicar a los alumnos modos de hablar dentro del discurso matemático. Un objetivo del discurso matemático del profesor ilustrado desde este marco es el de comunicar objetos de aprendizaje mediante el uso progresivo y acumulativo de ejemplos –siguiendo a Watson y Mason (2005) y Zodit y Zaslavsky (2008), se entiende *ejemplo* como caso particular de una clase más amplia de objetos matemáticos desde la cual es posible generalizar conocimiento matemático–. Asimismo, el uso de ejemplos es un objetivo del discurso matemático del profesor que conlleva dos objetivos: construir significados sobre la generalidad que se ejemplifica e impactar en la creación de oportunidades de aprendizaje para los alumnos. Estos (sub)objetivos del uso de ejemplos se asemejan respectivamente a lo que Gee (1996) y Van Dijk (1996) denominan las dimensiones semántica y pragmática de cualquier discurso.

Un rastreo de la literatura sobre ejemplos en educación matemática apunta a la existencia de usos de ejemplos con potencial en la creación de oportunidades que sean explorables y eventualmente aprovechables para el desarrollo del aprendizaje matemático de los alumnos. Con respecto a la selección de ejemplos, Bills y Watson (2008) señalan la importancia de considerar ejemplos que atiendan a una diversidad de variaciones y que de modo acumulativo contribuyan a la enseñanza de un objeto de aprendizaje. La idea de manejar variaciones de manera fundamentada es básica y da lugar, en términos de Watson y Mason (2005), a los criterios de similitud, contraste y simultaneidad. Así, un conjunto de ejemplos atiende al criterio de similitud si se muestran aspectos del objeto de aprendizaje que deben permanecer invariantes. Por otra parte, un conjunto de ejemplos atiende al criterio de contraste si se incluye la variación de aspectos que debieran permanecer invariantes y que al no hacerlo se convierten en no-ejemplos o en casos especiales por motivo de algún rasgo matemáticamente relevante. Por último, un conjunto de ejemplos atiende al criterio de simultaneidad si se mantienen invariantes aspectos que definen el objeto de aprendizaje a la vez que se muestran aspectos que admiten variación. Atender a estos criterios, por separado o en combinación, implica mencionarlos a fin de que la discusión de su relevancia se produzca de modo explícito mediante la aportación de argumentos matemáticos conectados que faciliten el desarrollo de generalizaciones.

Con respecto a la secuenciación, Zodik y Zaslavsky (2008) indican que los ejemplos, al interrelacionarse, actúan como objetos mediadores a fin de generalizar una clase de objetos más amplia. Según estos autores, si existe una cadena de ejemplos de dificultad creciente en la que cada uno se apoya en los inmediatamente anteriores, la secuenciación es adecuada; cuanto más se interrumpan esa dificultad creciente o esos apoyos mutuos, la secuenciación será menos adecuada. No se puede determinar de antemano en qué consiste una dificultad creciente adecuada para ejemplificar un objeto de aprendizaje cualquiera, puesto que esto dependerá de la estructura conceptual de cada objeto y del discurso matemático específico en el que sitúe la comunicación sobre el uso de ejemplos. Ahora bien, deben tenerse en cuenta los aspectos matemáticos que estructuran cada objeto para estimar la complejidad involucrada y la introducción sucesiva de ejemplos a través de la variación primero de algunos aspectos más simples y después de aspectos supuestamente más complicados de comprender.

Con respecto a la explicación de ejemplos en clase de matemáticas, Goizueta (2015) identifica explicaciones (no solo de ejemplos) en datos de clase cuando se aportan argumentos matemáticos, esto es, razonamientos a fin de afirmar, aceptar o reducir la incertidumbre acerca de proposiciones matemáticas utilizadas durante la resolución de una tarea. El carácter explicativo del argumento no se deriva estrictamente de su contenido proposicional; interviene también el hecho de que el argumento se comunique en el discurso de forma conectada a otros argumentos por subordinación, continuidad, refuerzo mutuo, implicación, oposición, etc. En Goizueta (2015) se menciona la adaptación de ejemplos y de explicaciones en el discurso del profesor derivada de la comunicación con alumnos. Siguiendo a Schober y Brennan (2003), en la actual investigación entendemos que hay adaptaciones (en particular, de ejemplos y explicaciones de ejemplos) meramente lingüísticas y otras que dan lugar a modificaciones más complejas de respuesta directa o indirecta a lo solicitado por un discurso en interacción con el discurso matemático del profesor.

Llegados a este punto, en adelante con discurso matemático del profesor, nos referiremos a los procesos de selección, secuenciación, explicación y adaptación de ejemplos mediante los cuales este se comunica con los alumnos durante la resolución de una tarea en clase para explicar una generalidad matemática. Centramos la propuesta analítica, por lo tanto, en momentos específicos de enseñanza de las matemáticas con ejemplos. Más allá de las limitaciones en el rango de aplicación de la noción que presentamos, esta opción es un punto de partida que habrá de permitir una noción más general para la enseñanza con modelos, con esquemas de prueba, etc.

CONSTRUCCIÓN DE UNA NOCIÓN DE COHERENCIA LOCAL

Elaboramos una noción de coherencia local cuyo estudio ha de dar cuenta de la singularidad del discurso matemático hablado del profesor cuando comunica ejemplos en clase. Para momentos de la enseñanza de un objeto de aprendizaje mediante una tarea, la coherencia local del discurso matemático del profesor se fundamentará en:

Condición 1. La selección de ejemplos
Condición 2. La secuenciación de ejemplos
Condición 3. La explicación de ejemplos
Condición 4. La adaptación de ejemplos y de explicaciones

Todas estas condiciones admiten niveles de cumplimiento. Para configurar los niveles relativos a la selección y a la secuenciación, nos inspiramos en resultados sobre la combinación de criterios de similitud, contraste y simultaneidad en el uso de ejemplos (véase sección anterior). Para los niveles relativos a la explicación y a la adaptación, nos inspiramos en resultados sobre la identificación de argumentos y conexiones (véase sección anterior). La tabla 1 recoge los niveles que consideramos y precisa el significado dado a cada uno. Así, en cuanto a los niveles de selección, se asigna un nivel 0 al discurso del profesor, si todos los ejemplos que se identifican incorporan la variación de dos o más aspectos a la vez, sin que se proporcionen ejemplos más simples con la variación de un solo aspecto. Dada la tarea de la investigación y la generalidad matemática de la que se parte en nuestros datos (véase sección siguiente), este nivel 0 se correspondería con un discurso donde todos los ejemplos –no importa cuántos– modifican a la vez los valores de a y b. En el otro extremo, el nivel 3 se correspondería con un discurso donde hay ejemplos que varían solo a o bien solo b, junto a otros que varían a y b, donde además se comunican lo que se mantiene –similitud– y lo que cambia –contraste–. El significado dado a los cuatro niveles de cada proceso examinado atiende a una lógica similar (véanse concreciones de todos los niveles en las tablas 2 y 3). Asimismo, la variabilidad en las condiciones establecidas de coherencia local permite plantear grados de codesarrollo al combinar niveles de selección, secuenciación, explicación y adaptación, lo que lleva a considerar grados de coherencia.

Tabla 1.
Descripción de niveles de desarrollo de ejemplos

Ejemplos	Nivel O	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Selección (SE)	Solo variación simultánea de dos o más aspectos	Solo variación de un aspecto con atención a similitud o contraste	Al menos dos variaciones de aspectos distintos, con atención a similitud y/o contraste	Variación simultánea de dos o más aspectos con atención a similitud y contraste
Secuenciación (SC)	Sin cadena de complejidad creciente	Cadena de complejidad creciente excepto por ejemplos intermedios	Cadena de complejidad creciente excepto por un ejemplo	Cadena de complejidad creciente sin excepciones
Explicación (EX)	Sin argumentos matemáticos	Argumentos matemáticos sin conexiones entre ellos	Argumentos matemáticos con conexiones entre algunos	Argumentos matemáticos con conexiones entre todos
Adaptación (AD)	Sin respuestas a preguntas de alumnos	Respuestas a preguntas de alumnos sin elaboración posterior	Respuestas a preguntas de alumnos con elaboración posterior	Respuestas a preguntas de alumnos con base en ejemplos previos o nuevos

Los grados de coherencia, que surgen de analizar de manera integrada los niveles de la tabla 1, han de informar del discurso matemático del profesor. Para completar el estudio de la coherencia local, conviene examinar la función del discurso del profesor en la interacción con los discursos de los alumnos en clase. A todo esto, suponemos que hay una relación empíricamente compleja entre grados de coherencia e impacto del discurso del profesor. Puede ocurrir que se observe un grado elevado de coherencia local en un discurso para el que, por otra parte, no se disponga de evidencias de impacto en el aprendizaje de los alumnos. Asimismo, puede ocurrir que se observe un grado bajo de coherencia en un discurso del cual se tengan evidencias de impacto en el aprendizaje. Por ello, conviene refinar la discusión de la coherencia con la siguiente pregunta: ¿Hay evidencias en los discursos de los alumnos de la exploración de oportunidades de aprendizaje matemático sobre el objeto que se ejemplifica?

En síntesis, nuestro estudio de la coherencia local del discurso matemático del profesor equivale al estudio del grado de coherencia y del impacto en los discursos de los alumnos. No es una propuesta pensada para caracterizar al profesor en su práctica educativa, sino para comprender cuáles son y cómo se desarrollan los discursos matemáticos en la enseñanza. Son estos discursos los que crean objetos de enseñanza y aprendizaje con significados susceptibles de ser comunicados a los alumnos.

TAREA, PARTICIPANTES Y MÉTODOS

A fin de mostrar la aplicabilidad de las condiciones de coherencia local, tomamos datos grabados en vídeo de dos lecciones con alumnos de 14 y 15 años y dos profesores, P1 y P2. Ambos cuentan con varios años de experiencia docente y su formación universitaria inicial fue específica en matemáticas. P2 ha participado en estudios anteriores conducidos por el equipo de investigación, en cambio P1 es la primera vez que participaba, aunque ya había estado colaborando en proyectos de investigación-acción con otro equipo. De ahí que tanto P1 como P2 compartan experiencia y compromiso con respecto a su desarrollo profesional en entornos colaborativos de reflexión sobre la práctica educativa.

Desde el equipo de investigación, se pensó un tema matemático curricularmente justificado para el cual no hubiera rutinas ya enseñadas en alguna de las clases. Con este criterio se optó por el tema de probabilidad. Para diseñar la experimentación, se colaboró con P1 y P2 en la adaptación de una tarea propuesta en Goizueta (2015) sin que hubiera preparación deliberada de ejemplos. La tarea quedó así formulada:

> Dos chicos juegan a lanzar una moneda de modo que uno gana 1 punto si sale cara y el otro 1 punto si sale cruz. Cada uno pone 3 € y deciden que el que gane 8 puntos se quedará con los 6 €. Sin embargo, la partida se interrumpe cuando uno ha ganado 7 puntos y el otro 5. ¿Cómo se repartirán el dinero?

En las dos aulas hubo una dinámica de introducción breve de la tarea a cargo del profesor, trabajo autónomo en pequeños grupos de cuatro o cinco alumnos con uso del cuaderno, puesta en común de aproximaciones a la tarea y recopilación final en la pizarra. Aunque no era la dinámica más habitual, los alumnos estaban acostumbrados a trabajar en grupo con el apoyo puntual del profesor durante la resolución de una tarea. En las respectivas introducciones, P1 y P2 destacaron la importancia de la tarea en la historia de las matemáticas y anticiparon la complejidad de su resolución. Hubo menciones tácitas a la probabilidad: «si esto ocurre, se trata de ver quién va a ser más fácil que gane la partida» (P1); «habrá que ver quién lo tiene mejor para ganar» (P2).

En estos contextos de aula y de desarrollo de la tarea, el objeto principal de aprendizaje que consideramos en las dos lecciones es el siguiente: *cálculo de probabilidades del suceso «ganar la partida cuando un jugador tiene* a *puntos y el otro* b». Dicho esto, los ejemplos son casos particulares de la generalidad: *ganar la partida cuando un jugador tiene* a *puntos y el otro* b.

Para cada lección se transcribieron los turnos donde hubiera mención de ejemplos o alusión a ellos en el discurso hablado del profesor y se incluyeron turnos anteriores y posteriores de discursos hablados de los alumnos en interacción con el profesor. A partir de aquí, se determinaron los niveles de selección, secuenciación, explicación y adaptación de ejemplos, para luego realizar una mirada conjunta a los resultados y determinar cualitativamente el grado de coherencia del discurso matemático del profesor en cuestión. Batanero (2016), García-Cruz (2000), García, Medina y Sánchez (2014) y Goizueta (2015) sirvieron para examinar la relevancia de los argumentos dados mediante su vinculación con objetos matemáticos involucrados en el cálculo de probabilidades de un suceso (e.g. suceso aleatorio, posibilidad y posibilidad favorable). Al estudio de las condiciones de coherencia local siguió la búsqueda de evidencias de oportunidades de aprendizaje para los alumnos que fueran relativas al objeto de aprendizaje ejemplificado. Documentamos turnos hablados de alumnos donde hubiera exploración explícita de oportunidades en la interacción con el discurso del profesor. Hubo discurso escrito en la pizarra, en la ficha de la tarea y en los cuadernos de los alumnos que no se incluyó en el conjunto de datos por analizar.

COHERENCIA LOCAL DEL DISCURSO MATEMÁTICO DE P1

Estudiamos la coherencia local del discurso matemático de P1. En primer lugar buscaremos los ejemplos que se comunican en la enseñanza del *cálculo de probabilidades del suceso «ganar la partida cuando un jugador tiene* a *puntos y el otro* b». Tras el discurso de una alumna sobre una solución de reparto proporcional (acompañado de una representación en la pizarra, 7/12·6=3,5 € y 5/12·6=2,5 €), se introducen cuatro ejemplos; uno de ellos se corresponde con el enunciado de la tarea y los dos últimos surgen en interacción con el discurso de otra alumna (A1 en las transcripciones). Los textos subrayados de la primera transcripción contienen los ejemplos: Ej1) a=7, b=0; Ej2) a=7, b=5; Ej3) a=1, b=0; Ej4) a=2, b=0. Se observa una primera cadena de ejemplos de complejidad monótona creciente en la secuenciación, con a=7, que apenas se mantiene y se interseca con otra cadena de ejemplos para $b=0$, que es más dominante respecto a la cantidad de ejemplos pero que tampoco se mantiene.

1 P1: Ahora imaginad que *la partida se interrumpe cuando uno ha ganado siete puntos y el otro todavía ningún punto*$_{Ej1}$. ¿Cómo se reparten el dinero si ocurre esto? Según vuestro grupo, hay que repartir los seis euros entre... ahora *no son doce tiradas con siete y cinco puntos*$_{Ej2}$, ahora *son siete tiradas*$_{Ej1}$. Pues... [en la pizarra 7/7·6=6, 0/7·6=0], aplico lo que me habéis dicho y va a pasar que uno se queda con los seis euros y el otro con nada.
2 A1: Pues claro, porque no ha sacado ni un solo punto y el otro casi ha ganado.
3 P1: O sea que vuestra manera os sigue pareciendo que funciona. ¿Y si *la partida se interrumpe cuando uno ha ganado un punto y el otro está aún con cero puntos?*$_{Ej3}$ ¿Entonces? Ahora *no son ni doce*$_{Ej2}$ *ni siete tiradas*$_{Ej1}$... [en la pizarra 1/1·6=6, 0/1·6=0]. Otra vez hay un jugador que se lleva todo el dinero, pero ahora ni siquiera estaba en la recta final para ganar.
4 A1: Ya, mala suerte. Solo han tirado una vez.
5 P1: Pero esto puede ocurrir, se puede interrumpir así de pronto. Incluso si solo da tiempo a *dos tiradas y uno saca dos puntos*$_{Ej4}$, entonces hacemos lo mismo y... [en la pizarra 2/2·6=6, 0/2·6=0], un chico se lo va a volver a llevar todo, *con solo dos puntos*$_{Ej4}$. ¡Solo *ha conseguido dos puntos*$_{Ej4}$ y los seis euros para él!

Enumeramos los turnos de modo consecutivo, pero no es hasta más tarde cuando el discurso de P1, en interacción con discursos de dos alumnas (A1 y A2), alude a las posibilidades totales y favorables de ganar de cada jugador. En los textos en cursiva que siguen se alude a los argumentos: Arg1) todos los ejemplos se resuelven con un mismo razonamiento; Arg2) el razonamiento de reparto proporcional no es válido; Arg3) el razonamiento debe contemplar lo que falta por ganar; Arg4) el cálculo de las posibilidades totales de ganar es relevante, y Arg5) el cálculo de las posibilidades favorables deriva del cálculo de las posibilidades totales. Arg1, Arg2 y Arg3 se complementan, mientras que Arg5 se subordina a Arg4. No se comunica la conexión entre ambas cadenas de argumentos, en particular no se relacionan los puntos que faltan por ganar con los cálculos de posibilidades ni con el cálculo de probabilidades.

6 P1: *El mismo modo de repartir nos debería llevar a algo que fuera también bastante razonable*$_{Arg1,2}$. Pero seis euros para uno y nada para el otro, cuando apenas había empezado la partida, no sé, *no veo que el mismo modo de proceder convenza por igual*$_{Arg2}$. *Se saquen los puntos que se saquen y se interrumpa la partida cuando se interrumpa, deberíamos llegar a repartir el dinero siempre convencidos*$_{Arg1,2}$. *¿Qué se nos puede estar escapando?*$_{Arg3}$ A lo mejor *ni siquiera los dos coma cinco euros y los tres coma cinco deberían convencernos*$_{Arg2}$ porque el modo de proceder luego nos lleva a seis y cero. *Siempre debería funcionar*$_{Arg1}$.
7 A2: Pero... ¿cómo?
8 P1: ¿Alguien ha tenido en cuenta *cuántos puntos les faltan para ganar la partida*$_{Arg3}$ cuando uno lleva siete puntos y el otro cinco? ¿Y cuando uno de los chicos lleva un punto y el otro lleva cero puntos? Entonces, *¿cuántos puntos le faltan a cada uno para ganar?*$_{Arg3}$ El chico que tiene solo uno y al que le queríais dar los seis euros solo le lleva un punto de ventaja al chico que no tiene ningún punto, ese que queríais dejar sin nada de dinero. *Tenemos que conseguir verlo de otro modo para que funcione*$_{Arg3}$. ¿Por qué decidimos los euros con los puntos que tienen? *¿Por qué no estamos viendo los puntos que les faltan?*$_{Arg3}$
9 A1: Cuando solo le falta un punto por ganar, podemos verlo en negativo porque todavía se puede perder.
10 P1: Vamos a volver a pensar que se interrumpe cuando uno ha ganado siete puntos y el otro ninguno. Al chico que le falta un punto por ganar, *¿cuántas posibilidades tiene de ganar?*$_{Arg4}$ *¿Qué puede pasar?*$_{Arg5}$ *De todo lo que puede pasar, ¿qué le va bien a este chico?*$_{Arg4}$

Con respecto a la adaptación de ejemplos y de explicaciones a raíz de la interacción con discursos de alumnos, el discurso de P1 responde a comentarios de A1 en tres ocasiones; de hecho, dos de los ejemplos tienen el efecto de refutar los comentarios de esta alumna, de inmediato y al cabo de unos turnos donde la aproximación de A1 al problema se retoma. No obstante, hay un momento del discurso del aula donde una pregunta de A2 acerca del modo de proceder en la resolución («Pero... ¿cómo?») no se responde ni hay evidencias de que se considere más adelante. En cierta medida todo discurso es resultado de los discursos que le preceden y se constituye como respuesta a ellos; pero como ocurre con la pregunta de A2, esto no implica necesariamente que la reacción se materialice mediante una respuesta visible.

La tabla 2 ilustra los niveles de selección, secuenciación, explicación y adaptación establecidos. SE2 da cuenta de la atención a una variación por contraste seguida de dos variaciones por similitud. SC1 da cuenta de la existencia de una cadena de complejidad creciente, con dos ejemplos que se separan de dicha cadena. EX1 da cuenta de la presencia de argumentos matemáticos orientados a refutar las *soluciones* dentro del modelo proporcional y avanzar hacia el cálculo de posibilidades totales y favorables de ganar. Por último, AD2 da cuenta de la influencia parcialmente visible de discursos de alumnos en el discurso del profesor. No se observan argumentos sobre el cálculo de probabilidades que apoyen la conexión entre cálculo de posibilidades y cálculo de probabilidades. Esta conexión se comunica al escribir en la pizarra la fórmula laplaciana acompañada del comentario «Esto es lo que tenéis que recordar». No hay, por tanto, comparación de sucesos más o menos probables mediante el cálculo combinatorio de posibilidades favorables y desfavorables para dos ejemplos.

Tabla 2.
Aplicación de niveles al discurso matemático de P1

En la selección de ejemplos hay:
Variación por contraste de b=5 a b=0 y a=7 fijo, en representación del ejemplo original y del caso donde a un jugador le falta un punto y al otro le faltan todos. *Variación por similitud* de b=0 con a=7, 1, en representación de dos casos distintos donde a un jugador le faltan todos los puntos que darían lugar a una misma *solución*. *Variación por similitud* de b=0 con a=1, 2, en representación de un tercer caso distinto donde a un jugador le faltan todos los puntos que seguiría dando lugar a una misma *solución*.
En la secuenciación de ejemplos hay:
Cadena de monotonía dominante de b=0 excepto para b=5 y a=7.
En la explicación de ejemplos hay:
Argumento 1. Todos los ejemplos se resuelven con un mismo razonamiento. *Argumento 2*. El razonamiento de reparto proporcional no es válido. *Argumento 3*. El razonamiento debe contemplar lo que falta por ganar. *Conexión argumentos 1, 2 y 3*. Continuidad [*Ni siquiera los dos coma cinco euros y los tres coma cinco debería convencernos / ¿Por qué no estamos viendo los puntos que les faltan? / Siempre debería funcionar*] *Argumento 4*. El cálculo de las posibilidades totales de ganar es relevante. *Argumento 5*. El cálculo de posibilidades favorables deriva del cálculo de posibilidades totales. *Conexión argumentos 4 y 5*. Subordinación [*De todo lo que puede pasar, ¿qué le va bien a este chico?*]
En la adaptación de ejemplos y explicaciones hay:
Discurso de A1. Reacción de ampliación de ejemplos y argumentos (Ej_3, Ej_4, Arg_2, Arg_3, Arg_4 y Arg_5), y de explicaciones (conexión entre Arg_4 y Arg_5). *Discurso de A2*. Reacción de circularidad entre explicaciones [*Pero... ¿cómo?/¿Alguien ha tenido en cuenta (...)?*]
En la selección, secuenciación, explicación y adaptación hay:
(SE2, SC1, EX1, AD2). Solo variaciones de un aspecto, dos por similitud y una por contraste, enlazadas mediante una línea poco clara de complejidad creciente y una cadena incompleta de argumentos matemáticos, con influencia visible del discurso de una alumna.

Tras determinar niveles intermedios en el discurso de P1, estudiamos el impacto observable en los discursos hablados de los alumnos. En el análisis de la cuarta condición de coherencia local se ha visto que el discurso del profesor se orienta en interacción con el discurso de A1; ahora pasamos a observar cómo el discurso de esta alumna también se orienta en interacción con el discurso del profesor. Entre los turnos [2] y [9] del discurso de A1 encontramos una diferencia de comprensión de la tarea y de aproximación a las nociones involucradas en el cálculo de probabilidades. Inferimos que el discurso de P1 entre los turnos de A1 ha proporcionado la oportunidad a esta alumna de explorar la tarea desde la perspectiva de las posibilidades de ganar de cada jugador. Consideramos además que ha sido influyente el discurso de otra alumna, A2, quien ha interactuado con el discurso de P1 solicitando más datos a las explicaciones [7]. En el discurso de A1 observamos un cambio de razonamiento determinista a especulativo. Decimos que se aprovechan las oportunidades ofrecidas por el discurso de P1 en el paso que va de predecir una posibilidad para el ejemplo de una partida a considerar varias posibilidades para los ejemplos con a=7 [«Todavía se puede perder»]. Esta evidencia apunta al aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje. La ausencia de más evidencias de exploración del cálculo de probabilidades en discursos de alumnos no es evidencia de la ausencia de oportunidades de aprendizaje. Lo que se pone de relieve es la dificultad de refinar la coherencia local del discurso del profesor cuando el análisis se centra en el discurso hablado y los alumnos hablan poco.

Concluimos que la coherencia local del discurso matemático de P1 podría haber sido mayor, si se hubieran elaborado conexiones entre argumentos que hubieran acompañado una presentación progresiva de la fórmula laplaciana, como «hecho matemático» inferible, y si se hubiera respondido siempre a los alumnos. La construcción histórica de la matemática escolar como género orientado a la instrucción y del discurso matemático escolar como medio de comunicación de rutinas son parte del contexto en el cual el discurso de P1 pasa de utilizar y conectar ejemplos a enseñar en la pizarra la fórmula del cálculo de probabilidades. Este resultado alude a las dimensiones histórica y cultural de la actividad matemática escolar conceptualizadas por Steinbring (2005) y recientemente refinadas por Roth y Radford (2011).

COHERENCIA LOCAL DEL DISCURSO MATEMÁTICO DE P2

Al estudiar la coherencia local del discurso matemático de P2 durante la enseñanza mediante ejemplos del *cálculo de probabilidades del suceso «ganar la partida cuando un jugador tiene* a *puntos y el otro* b», encontramos: Ej1) a=7, b=5; Ej2) a=7, b=6; Ej3) a=7, b=7; Ej4) a=3, b=4. En esta secuencia, excepto por el último ejemplo, se observa una cadena monótona de complejidad creciente al variar los valores de b. Hay además dos argumentos que involucran a todos los ejemplos y que se presentan con continuidad: Arg1) los ejemplos son resolubles matemáticamente, y Arg2) la situación de incertidumbre no es un obstáculo a la resolución.

1 P2: Este problema histórico se puede proponer de muchas maneras. Como os lo doy: *un jugador que ha llegado a siete puntos y otro que está con cinco*$_{\text{Ej1}}$. Pero también podría haber dicho que *un jugador ha llegado a siete puntos y el otro está con seis*$_{\text{Ej2}}$, o que *los dos jugadores están con siete puntos*$_{\text{Ej3}}$ cuando se interrumpe la partida... Si queréis pues que ninguno esté a solo un punto, *que uno tenga tres y el otro cuatro*$_{\text{Ej4}}$. En todos los casos *se soluciona matemáticamente*$_{\text{Arg1}}$ *sin saber qué hubiera pasado de verdad*$_{\text{Arg2}}$ si la partida hubiera continuado hasta el final.

Cuando más tarde dos alumnos (A3 y A4) solicitan ayuda, se produce una interacción donde se aporta una cadena de argumentos conectados. Observamos: Arg3) lo no posible es predecible con certeza; Arg4) todo lo posible es predecible con certeza; Arg5) todo lo posible y favorable es predecible con certeza; Arg6) la relación entre posible y favorable es relevante; Arg7) la comparación de esta relación es comparación de probabilidades. A pesar de que son argumentos matemáticamente válidos, notamos que para el ejemplo *a*=7 y *b*=6, y en el desarrollo de Arg_6 y Arg_7, se indica que hay tres posibilidades de desarrollo del juego que son equiprobables [13]. Esto pasa inadvertido en este momento de la lección, pero al quedar escritas las probabilidades equivocadas en la pizarra (i.e. 2/3 y 1/3), el error se detecta y modifica poco más tarde. A continuación marcamos en cursiva los textos de donde hemos inferido argumentos.

2 A3: Si no sabemos lo que va a pasar realmente, pues no se puede solucionar. O hay muchas soluciones...
3 A4: Sí, porque lo que va a pasar puede ser o esto, o aquello, o aquello otro...
4 P2: De acuerdo, no sabemos lo que va a pasar realmente, pero *sabemos lo que seguro que no va a pasar*$_{Arg3}$ en la tirada trece. *No puede pasar que el jugador que tiene cinco puntos ya gane la partida*$_{Arg3}$.
5 A4: Pero el jugador que tiene siete puntos ya podría ganar si le sale cara.
6 P2: Pues eso, también *podemos hablar seguro de lo contrario, de todo lo que puede pasar*$_{Arg4}$.
7 A4: Me he hecho un lío... ¿cuántos puntos tiene el otro?
8 P2: Los dos tienen siete. *Aciertas seguro si dices todo lo que puede pasar*$_{Arg3}$.
9 A4: Se acaba la partida en la tirada que viene porque o gana uno o gana el otro.
10 A3: La mitad del dinero para cada uno. Hacemos el otro, que no es tan fácil.
11 P2: Vamos poco a poco. Si ahora un jugador tiene siete puntos y el otro tiene seis, *acierto si digo que puede pasar todo esto...*$_{Arg4}$ [en la pizarra, dibujo de bifurcaciones].
12 A4: O se acaba en seguida porque el de siete saca un punto más, o quedan empatados en la tirada trece y luego estamos como antes, o gana uno o el otro.
13 P2: Vamos a ver, de aquí salen dos opciones, ocho y seis o siete y siete, y de aquí salen otras dos, ocho y siete o siete y ocho [dibujo de bifurcaciones]. *Acierto seguro si digo que pasará realmente una de estas tres opciones*$_{Arg4}$. Al jugador con siete puntos, le encantan dos de estas tres opciones, y al que tenía seis puntos solo le encanta una de estas tres. ¿Sí? No sabemos lo que va a pasar, pero *sabemos seguro todo lo que puede pasar*$_{Arg4}$ y de todo esto *sabemos seguro lo que le va bien a cada uno*$_{Arg5}$. De ahí sale *una relación de dos tercios y un tercio*$_{Arg6}$. El segundo podría ganar pero solo le va bien una de tres [en la pizarra, escritura de 1/3]. ¿Sí? Al otro le van bien dos de tres [escritura de 2/3]. Es más dos tercios que un tercio. Entonces *es más probable que gane el primero*$_{Arg7}$. *Sin saber qué pasará de verdad*$_{Arg1}$, *hemos conseguido resolverlo matemáticamente*$_{Arg2}$.

Con respecto a la adaptación de ejemplos y de explicaciones, el discurso de P2 responde en todas las ocasiones incorporando apreciaciones que precisan cuestiones introducidas por discursos de A3 y de A4. Cuando se menciona el hecho de que no se puede predecir con certeza lo que va a pasar en las tiradas siguientes, desde el discurso de P2 se sigue con esta consideración, lo cual lleva a elaborar un argumento acerca de la posibilidad de predecir con certeza lo que no va a pasar. Por otro lado, cuando se comunica la posibilidad de ganar para el caso del jugador de uno de los ejemplos, desde el discurso de P2 de nuevo se da continuidad y se amplía esta consideración mediante un argumento acerca de la posibilidad de predecir con certeza todo lo que puede pasar. La relación entre discursos, con afirmaciones seguidas de argumentos, se mantiene habiendo también una respuesta directa a una pregunta en el discurso de A4.

La tabla 3 ilustra los niveles de selección, secuenciación, explicación y adaptación de ejemplos, así como su coherencia local para el discurso de P2. SE3 da cuenta de la atención a una variación con simultaneidad de criterios precedida de una variación por similitud. SC3 da cuenta de una línea dominante de complejidad creciente excepto por un único ejemplo que se aleja. EX2 da cuenta de la comunicación de argumentos matemáticos conectados en el discurso de P2 de utilidad en la construcción y comparación de las ideas de posibilidades totales y posibilidades favorables de ganar. Por último, AD3 da cuenta de la incorporación en el discurso del profesor de reacciones a todos los comentarios introducidos por discursos de alumnos. Todos los argumentos se conectan dos a dos, ya sea de modo sucesivo o alternado, produciéndose una cadena de razonamiento que avanza desde la afirmación de los sucesos aleatorios como fenómenos matematizables a la propuesta de resolución de uno de los ejemplos. Aunque el error en el discurso de P2 es relevante, se comunican argumentos correctos y se vuelven a realizan los cálculos de las probabilidades tras escribir la fórmula laplaciana en la pizarra y mostrar su aplicación a cada ejemplo.

Tabla 3.
Aplicación de niveles al discurso matemático de P2

En la selección de ejemplos hay:
Variación por contraste de *a*=7 a *a*=3 y de *b*=5, 6, 7 a *b*=4, en representación de un caso donde ningún jugador está a un punto de ganar, precedida de: *Variación por similitud* con *a*=7 y b=5, 6, 7, en representación de tres casos distintos donde al menos un jugador está a un punto de ganar.
En la secuenciación de ejemplos hay:
Cadena de monotonía dominante de *a*=7 excepto por *a*=3 y *b*=4.
En la explicación de ejemplos hay:
Argumento 1. Los ejemplos son resolubles matemáticamente. *Argumento 2*. La situación de incertidumbre no es un obstáculo a la resolución. *Conexión argumentos 1 y 2*. Refuerzo [*Se soluciona matemáticamente sin saber qué hubiera pasado de verdad*] *Argumento 3*. Lo no posible es predecible con certeza. *Argumento 4*. Todo lo posible es predecible con certeza. *Conexión argumentos 3 y 4*. Oposición [*También podemos hablar seguro de lo contrario*] *Argumento 5*. Todo lo posible y favorable es predecible con certeza. *Conexión argumentos 4 y 5*. Subordinación [*De todo esto sabemos seguro lo que le va bien a cada uno*]. *Argumento 6*. La relación entre posible y favorable es relevante. *Conexión argumentos 5 y 6*. Continuidad [*Si lo juntamos sale una relación...*] *Argumento 7*. La comparación de esta relación es comparación de probabilidades. *Conexión argumentos 6 y 7*. Implicación [*Entonces es más probable que gane el primero*] *Conexión argumentos 1 y 6*. Refuerzo [*Hemos conseguido resolverlo matemáticamente*]
En la adaptación de ejemplos y explicaciones hay:
Discurso de A3. Reacción de ampliación de argumentos (Arg_3 y Arg_4). *Discurso de A4*. Reacción de ampliación de argumentos (Arg_3, Arg_4, Arg_5, Arg_6 y Arg_7) y de respuesta directa [*¿Cuántos puntos tiene el otro?/Los dos tienen siete (...)*]
En la selección, secuenciación, explicación y adaptación de ejemplos hay:
(SE3, SC3, EX2, AD3). Variación con simultaneidad precedida de una variación por similitud, enlazadas mediante una línea de complejidad creciente, excepto por un ejemplo, y una cadena coordinada de argumentos matemáticos, bajo influencia del discurso de dos alumnos.

Tras determinar un grado de coherencia local elevado en el discurso de P2 y de acuerdo con las premisas en Ferrer y otros (2014), estudiamos el impacto observable en discursos de alumnos. Encontramos cambios de comprensión de la tarea en los discursos de A3 y A4, que han sido influyentes en la elaboración de argumentos acerca de la noción de probabilidad. Entre los turnos [2] y [10] del discurso de A3 se produce un cambio desde considerar la tarea irresoluble o bien con múltiples soluciones a comunicar una solución para un ejemplo. Inferimos que los discursos de P2 y de A4 entre estos turnos proporcionan la oportunidad a A3 de considerar la solución que propone, especialmente tras haber sido introducidos los argumentos sobre lo predecible en el contexto de la tarea. Vemos un aprovechamiento similar de oportunidades entre los turnos [3] y [5], por un lado, y [9] y [12], por otro, del discurso de A4, donde se pasa de sugerir la multiplicidad de soluciones a mencionar las posibilidades de ganar con un razonamiento combinatorio aplicado a un ejemplo. Dicho esto, concluimos que la coherencia local del discurso matemático de P2 es bastante elevada dados los ejemplos y la cadena de argumentos y a pesar de la detección de un error. Cabe añadir el impacto que el discurso de P2 ejerce en los discursos de al menos dos alumnos, lo cual sugiere que la exploración del ejemplo con a=7 y b=7 genera oportunidades de aprendizaje relevantes en la comprensión del cálculo de probabilidades. La coherencia hubiera sido mayor si en las explicaciones finales se hubieran retomado los ejemplos a los cuales se ha dedicado tiempo en la presentación de la tarea o si se hubiera revisado su papel cuando se comunica que no se ha clarificado con qué ejemplo se va a trabajar [«Me he hecho un lío»].

A diferencia de lo comentado para el discurso de P1, donde la lista de argumentos no era suficiente ni tampoco lo eran las conexiones, ahora estamos ante un discurso que localmente consigue enlazar la presentación inicial de ejemplos con la comparación de probabilidades y su cálculo. Una vez más este es un discurso que se produce dentro de un discurso sobre qué es y cómo se construye la matemática escolar, algo que también se detectó en Chico (2014) y en Goizueta (2015). La multiplicidad de discursos coexistentes con el del profesor en el momento analizado de desarrollo de la tarea deja espacios para que la enseñanza y el aprendizaje de rutinas y de modos preestablecidos de hablar y comunicar no inhiban la creación de oportunidades de aprendizaje para los alumnos a lo largo de la instrucción.

DISCUSIÓN FINAL Y CONCLUSIONES

Hemos ilustrado discursos matemáticos de dos profesores, en interacción con discursos de alumnos, durante la resolución de una tarea de probabilidad. Al aportar los niveles de desarrollo para discursos de dos profesores en las tablas 2 y 3, surge el reto de pasar de la operación de identificar a la de comparar. El tipo de análisis planteado asemeja diferencias y similitudes a divergencia y convergencia de niveles, respectivamente. Los datos de los que disponemos no permiten explicar a qué se deben las diferencias entre ambos casos, pero sí permiten señalar que efectivamente existen diferencias ostensibles. La tabla 4 ofrece una comparativa que ayuda a visualizar las particularidades de cada discurso analizado con respecto a otro discurso de referencia. Los profesores no comparten celdas con un mismo nivel y, de hecho, para todos los niveles de desarrollo, el discurso de P2 está siempre por delante del discurso de P1. Debe tenerse en cuenta que esta comparativa referencial informa estrictamente sobre los fragmentos del discurso que se vinculan mediante la tabla. Cualquier comparación más general entre discurso matemático de P1 y P2 designaría situaciones hipotéticas que, por extensión, compartirían los niveles locales de desarrollo. Vemos un enorme riesgo en el hecho de reproducir por extensión los niveles locales de desarrollo.

Tabla 4.
Comparativa de niveles entre los discursos matemáticos de P1 y P2

Ejemplos	*Nivel O*	*Nivel 1*	*Nivel 2*	*Nivel 3*
Selección			P1	P2
Secuenciación		P1		P2
Explicación		P1	P2	
Adaptación			P1	P2

En las dos lecciones, se seleccionan ejemplos que se utilizan para relacionar el cálculo de probabilidades con combinatorias de posibilidades totales y favorables. El uso de más de una variación entre ejemplos es también común, aunque con menor intensidad en el discurso matemático de P1. De los resultados de nuestros análisis se desprende, además, que el discurso de P1 aporta argumentos y conexiones limitadas en el proceso que va de la refutación del razonamiento proporcional a la introducción de un modelo alternativo de razonamiento, que finalmente se comunica con la escritura de la fórmula laplaciana. Si bien el discurso de P1 contempla una mayor variación informada de ejemplos con respecto a lo que comunica el discurso de P2, y su presencia está más relacionada con discursos de alumnos, ni más ejemplos ni más tiempo de habla conducen a una mayor elaboración de explicaciones. La interacción con discursos de alumnos, y con ello el acceso al impacto de oportunidades de aprendizaje generadas, podría haber intensificado la aportación de argumentos y conexiones. Esta apreciación, sin embargo, debe tomarse con cautela porque en el discurso matemático de P2, con abundancia relativa de argumentos y especial atención a los discursos de los alumnos, siguen echándose en falta conexiones suficientes entre argumentos. Más en general si se dispusiera de datos donde un discurso matemático, ya sea de P1, de P2 o de otro profesor, estuviera por completo en los niveles superiores de desarrollo; esto no significaría que se trata de un discurso matemático para la instrucción de tipo ideal. De acuerdo con nuestro marco teórico, no existen discursos de profesores que sean ideales sino discursos más favorables que otros para que se produzcan y comuniquen unas ciertas oportunidades de aprendizaje a los alumnos.

Las consideraciones de los párrafos anteriores no son ajenas a la tarea utilizada en la investigación. Cualquier discurso situado en un proceso de instrucción depende de la formulación de la tarea y de las condiciones de su realización, entre otros aspectos de la actividad en el aula. Las oportunidades de aprendizaje en torno a nociones de probabilidad se generan en el discurso del profesor mediante el desarrollo de una tarea formulada de un cierto modo (e.g. «uno ha ganado 7 puntos y el otro 5»), para cuya resolución se plantea una cierta dinámica de trabajo. Por un lado, una formulación de la tarea con jugadores que han ganado 7 y 0 puntos podría haber dificultado la gradación monótona creciente y decreciente de ejemplos al proporcionarse un «caso extremo». Por otro lado, aunque la adaptación a discursos de alumnos se hace visible en la puesta en común, este es un resultado previsiblemente relacionado con los apoyos que el profesor ha comunicado en momentos anteriores.

Hemos comenzado el artículo anunciando que un propósito de la investigación era elaborar una noción de coherencia local aplicable al estudio del discurso matemático hablado del profesor en clase. Viendo los resultados de los análisis, concluimos sobre el acierto de haber diferenciado procesos de selección, secuenciación, explicación y adaptación, además de haber considerado la interacción entre discursos. De distintos modos, las dos lecciones muestran que los ejemplos, por muy estructurada que sea su selección, no aportan por sí solos oportunidades de aprendizaje matemático. Las explicaciones que acompañan a los ejemplos son fundamentales, así como lo son los procesos de adaptación de explicaciones con base en las evidencias de exploración de ejemplos y explicaciones en discursos de alumnos. En todo esto no debe obviarse cómo se habla sobre los ejemplos y, más en general, cómo se comunican unos y otros argumentos. Frases como «¿Qué se nos puede estar escapando?» indican un registro coloquial distinto al registro matemático formal. La diversidad y alternancia de registros en el discurso del profesor de matemáticas son rasgos identificados por Pimm (1989) hace tiempo. No obstante, hasta donde sabemos, no se ha estudiado la relación entre el tipo de registro en el discurso del profesor, la adaptación a discursos de alumnos y la creación de oportunidades de enseñanza o de aprendizaje.

El análisis del uso de ejemplos presentado sugiere implicaciones para la acción con profesores. De nuestra investigación se vislumbran dos ámbitos de trabajo en el desarrollo profesional de profesores de matemáticas: la selección, secuenciación, explicación y adaptación de ejemplos, y la atención a discursos de alumnos y al propio a lo largo del despliegue de los procesos anteriores. Tomando las recomendaciones de García y otros (2006) acerca de un desarrollo profesional del profesor basado en el estudio de la práctica educativa, el estudio de la coherencia local del discurso del profesor podría adaptarse para el trabajo en torno a niveles de selección, secuenciación, explicación y adaptación de ejemplos, con énfasis en cómo estos niveles influyen en la creación de un discurso con impacto favorable en el aprendizaje. Se podría ahondar en la interpretación de cómo los discursos en clase informan sobre qué aspectos de un objeto se comunican y cómo. Esta reflexión lleva a la necesidad de profundizar en las oportunidades de interacción entre discursos, en cómo el uso de ejemplos apoya estas oportunidades, junto al modo en que todo esto apoya, a su vez, la creación y distribución de oportunidades de aprendizaje matemático para el alumnado. Estas cuestiones son útiles para seguir indagando acerca del potencial del discurso matemático del profesor como facilitador de la comunicación de una cierta cultura de la matemática escolar donde el aprendizaje del alumno sea prioritario.

AGRADECIMIENTOS

Estudio realizado en el seno del Proyecto EDU2015-65378-P, MINECO/FEDER.

REFERENCIAS

Adler, J. y Ronda, E. (2015). A framework for describing Mathematics Discourse in Instruction and interpreting differences in teaching. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 19, pp. 237-254.
https://doi.org/10.1080/10288457.2015.1089677

Adler, J. y Ronda, E. (2017). Mathematical Discourse in Instruction matters. En J. Adler y A. Sfard (eds.), *Research for educational change. Transforming researchers' insights into improvement in mathematics teaching and learning* (pp. 64-81). Londres, Reino Unido: Routledge.

Adler, J. y Venkat, H. (2014). Teachers' mathematical discourse in instruction: Focus on examples and explanations. En H. Venkat, M. Rollnick, J. Loughran y M. Askew (eds.), *Exploring mathematics and science teachers' knowledge. Windows into teacher thinking* (pp. 132-146). Londres, Reino Unido: Routledge.

Batanero, C. (2016). Understanding randomness: Challenges for research and teaching. En K. Krainer y N. Vondrová (eds.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 34-49). Praga, República Checa: ERME.

Bills, L. y Watson, A. (2008). Editorial introduction to «The role and use of examples in mathematics education». *Educational Studies in Mathematics*, 69, pp. 77-79.
https://doi.org/10.1007/s10649-008-9147-z

Callejo, M. L.; Valls, J. y Llinares, S. (2007). Interacciones y análisis de la enseñanza. Aspectos clave en la construcción del conocimiento profesional. *Investigación en la Escuela*, 61, pp. 5-21.

Chico, J. (2014). *Impacto de la interacción en grupo en la construcción de argumentación colectiva en clase de matemáticas.* Trabajo de tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

Ferrer, M.; Fortuny, J. M.; Morera, L. y Planas, N. (2014). The teaching activity and the generation of mathematical learning opportunities. En P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle y D. Allan (eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (vol. 2, pp. 73-80). Vancouver, Canadá: PME.

García, J. I.; Medina, M. y Sánchez, E. A. (2014). Niveles de razonamiento y abstracción de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 6, pp. 5-23.

García, M.; Sánchez, V.; Escudero, I. y Llinares, S. (2006). The dialectic relationship between research and practice in mathematics teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(2), pp. 109-128.
https://doi.org/10.1007/s10857-006-0003-8

García Cruz, J. (2000). Historia de una prueba: El reparto de la apuesta. *Suma*, 33, pp. 25-36.

Gee, J. P. (1996). *Social linguistics and literacies: Ideologies in discourses*. Nueva York: Routledge.

Goizueta, M. (2015). *Aspectos epistemológicos de la argumentación en el aula de matemáticas de secundaria*. Trabajo de tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically.* Londres, Reino Unido: Routledge.

Planas, N. y Valero, P. (2016). Tracing the socio-cultural-political axis in understanding mathematics education. En A. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero, *The second handbook of the psychology of mathematics education. The journey continues* (pp. 447-479). Rotterdam: Sense Publishers.

Roth, W. M. y Radford, L. (2011). *A cultural-historical perspective on mathematics teaching and learning*. Nueva York: Springer.

Schober, M. F. y Brennan, S. E. (2003). Processes of interactive spoken discourse: The role of the partner. En A. C. Graesser, M. A. Gernsbacher y S. R. Goldman (eds.), *Handbook of Discourse Processes* (pp. 123-164). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Sherin, M. G. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, pp. 205-233.
https://doi.org/10.1023/A:1020134209073

Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: An epistemological perspective*. Nueva York: Springer.

Van Dijk, T. A. (1996). *Estructuras y funciones del discurso*. Ciudad de México: Siglo XXI.

Venkat, H. y Adler, J. (2012). Coherence and connections in teachers' mathematical discourses in instruction. *Pythagoras*, 33(3), pp. 1-8, http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v36i1.281.

Watson, A. y Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Zodik, I. y Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 69, pp. 165-182.
https://doi.org/10.1007/s10649-008-9140-6

The teacher's mathematical discourse: How is it produced in the classroom and how can it be researched?

Núria Planas
Universitat Autònoma de Barcelona, Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals
Nuria.Planas@uab.cat

Alberto Arnal-Bailera
Universidad de Zaragoza, Departamento de Matemáticas
albarnal@unizar.es

Itziar García-Honrado
Universidad de Oviedo, Departamento de Estadística e Investigación Operativa y Didáctica de la Matemática
garciaitziar@uniovi.es

How can we examine if a teacher's discourse in the mathematics' subject is effective according to the goals of communicating a particular culture of school mathematics and producing opportunities for students to learn basic contents of this culture? We now have a large body of work in mathematics education in which social views have been used to approach mathematics teaching and learning through access to specific specialized discourses. Such body of work deals with the complexity of capturing some sort of cultural substance in the production of school mathematics through discourse. However, while these views are more widely accepted than ever, the analytical attempts to explain how oral discourses function and develop in the classroom are still scarce. In this paper, we present the construction of a notion of local coherence applied to the oral discourse of the teacher in the classroom. Drawing on the empirical study of teaching with examples, we create indicators of coherence and relate them to the generation of mathematics learning opportunities. We illustrate the process with classroom data from two teachers and two introductory lessons of probability. The first aim is to characterize the discourse –i.e. its coherence– in the lessons by addressing the communication of examples in the interaction with students. The attribution of grades of coherence and the discussion of learning opportunities serve to consider differences between the discourses of the two teachers. These differences show how the study of the selection, sequencing, explanation and adaptation of examples establishes internal singularities for each discourse. In this way, we achieve the major aim of evaluating the newly developed notion of local coherence. Although we pose a number of questions about the necessary adjustment of the notion in several ways, and importantly about its essential relativity, we conclude that it contributes to an improved understanding of the mathematical discourse of the teacher at a local level.